

Resolución de límites:

Algunos de los casos más comunes que trabajaremos se muestran a continuación como una ayuda de memoria. Es cierto que existen otros casos pero no los verás en este curso. No los mires mucho, sólo analízalo, trata de sacar una idea general y después haz muchos ejercicios.

El cálculo de límites puede ser muy sencillo si no te dejas asustar por la cantidad de casos que se puedan presentar y las dificultades aparentes de todos los ejercicios.

Los casos que se presentarán a continuación serán:

1. Sustitución directa.
2. Número sobre cero.
3. Límites cero sobre cero (en división de polinomios).
4. Límites infinitos.
5. Número sobre infinito.
6. Límites cero sobre cero (en funciones exponenciales y logarítmicas).

1) Sustitución directa:

En todos los casos vamos a intentar sustituir la variable y realizar las operaciones. En caso de que la operación no se pueda realizar porque caiga en un caso “raro” podremos resolver el límite por los métodos que se mostraran en los demás casos.

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 3} 5x^2 = 45$$

¿Fácil no? ¿Y si tengo un polinomio en vez de monomio?

$$\lim_{x \rightarrow 3} -2x^2 + 6x + 9 = 9$$

Lo mismo pero más veces. Lo que estamos aplicando ahí se llama álgebra de límites en particular lo que dice es:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x)$$

Esto además se cumple para la resta, multiplicación y división, en este caso debemos aclarar que se puede siempre que el segundo límite no de cero, ya que como recordarás no podemos dividir entre cero.

En el cuaderno deberías escribir que dice el álgebra de límites para esas operaciones.

Ejercicios: (para las expresiones exponenciales y logaritmos utiliza la calculadora)

Resuelve:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} 7x^6 + 6x - 10x^4 + 2 = \quad b) \lim_{x \rightarrow -2} 6x^2 + 6x = \quad c) \lim_{x \rightarrow 1} (-9x^4 + 6x).3 =$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 + 1)(6x - 3) = \quad e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 3}{5x - 9} = \quad f) \lim_{x \rightarrow -5} e^{3x+9} =$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -1} e^{2x+7} \cdot (5x+7) = \quad h) \lim_{x \rightarrow 0} L(3x+4) = \quad i) \lim_{x \rightarrow 1} L(2x-6) \cdot e^x + 4x =$$

2) Número sobre cero:

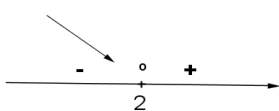
Este tipo de indeterminaciones se presenta cuando resolvemos límites laterales.

Ejemplo 1:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+3}{x-2} =$$

Observemos que al intentar resolverlo por sustitución directa el denominador se aproxima a cero, este es un detalle importante, no estamos dividiendo entre cero sino entre algo que se aproxima a cero por valores menores que el.

En estos casos lo primero es estudiar el signo del denominador así sabremos si es cero por izquierda o por derecha (valores negativos o positivos).

Sg(x-2)  como el límite que estamos estudiando es el límite cuando la x tiende a 2 por la izquierda, observamos el signo y nos dice que cuando la x tiende a dos por la izquierda f(x) tiende a cero por la izquierda es decir 0⁻.

Por lo que nuestro límite será:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+3}{x-2} = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

El signo del infinito nos viene dado por la regla de los signos en caso de que hubiera sido 0⁺ el resultado sería +∞.

Ejemplo 2:

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{4x+6}{x^2-9} =$$

Intentando resolverlo por sustitución directa resulta $-\frac{6}{0}$ por lo que haciendo el signo del denominador cuando la x tiende a menos tres por derecha, ¿se aproximará a cero por derecha o izquierda? Inténtalo.

La solución es $-\infty$ por si llegas a otra cosa.

Resuelve:

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{7x+2}{x-4} = & \quad b) \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{2x-10}{2x-12} = & \quad c) \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{x+6}{x^2-25} = & \quad d) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x+3x^2}{x^2-5x+6} = \\ e) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x^3-1} = & \quad f) \lim_{x \rightarrow -2^+} e^{\frac{3x}{5x-10}} = & \quad g) \lim_{x \rightarrow 4^-} e^{\frac{6x-12}{x^2-16}} = \end{aligned}$$

3) Indeterminación 0/0.

Si bien en el ejemplo anterior vimos una estrategia para salvar el problema de dividir un número entre un valor que se aproxima tanto como quiera a cero, la división cero sobre cero es un caso distinto. En estos casos la solución no es tan predecible ya que necesitamos más información respecto a la función para poder dar una respuesta, por esta razón decimos que estamos en una INDETERMINACIÓN o que el límite es indeterminado.

En este caso veremos cómo resolver estos límites cuando el 0/0 se produce en funciones racionales (polinomios sobre polinomios)

Ejemplo 1:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{0}{0} \text{ indeterminado}$$

Como la indeterminación se produjo por polinomios vamos a factorizar (escribir como multiplicación) los polinomios que aparecen, en particular el de segundo grado, y la herramienta a utilizar es el esquema de Ruffini.

	1	-5	6
2		2	-6
	1	-3	0

(x-3)

Por el esquema de Ruffini por tanto sabemos que se cumple la siguiente igualdad:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

El (x-2) es porque debemos poner el cociente que resulta del esquema (x-3) por x **menos** la raíz por la que bajamos el polinomio (siempre le cambiamos el signo a esa raíz).

De aquí que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 3)(x - 2)}{(x - 2)} = -1$$

(x-2)/(x-2) da uno por eso lo puedo tachar si quiero.

Ejemplo 2:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 5x^2 + 6x - 3}{x^2 - x} = ind.$$

	2	-5	6	-3
1		2	-3	0
	2	-3	3	

	1	-1	0
1		1	0
	1	0	0

$$2x^3 - 5x^2 + 6x - 3 = (2x^2 - 3x + 3)(x - 1) \quad y \quad x^2 - x = (x)(x - 1)$$

Llevándolo al límite que queríamos resolver, tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 5x^2 + 6x - 3}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(2x^2 - 3x + 3)(x - 1)}{(x - 1)(x)} \right) = 2$$

Ejemplo 3:

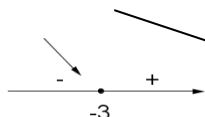
$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x + 9}{x^2 + 6x + 9} = ind.$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x + 9}{x^2 + 6x + 9} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3(x + 3)}{(x + 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3}{x + 3} = ? \text{ Dará infinito?}$$

Para saber la respuesta, recordemos que en el caso de un número sobre cero realizábamos el signo del denominador. Esto lo hacíamos para el límite lateral que se nos pidiera (por derecha o izquierda), pero en este caso como no se nos pide por ninguno en particular debemos hacer los dos. En caso de que los límites resulten iguales el límite tiene como solución ese valor y en caso contrario diremos que no existe el límite (condición necesaria y suficiente para la existencia de límite).

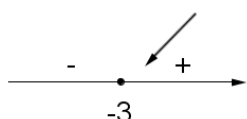
$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{3}{x + 3} = -\infty$$

Sg (x+3)



$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{3}{x + 3} = +\infty$$

Sg (x+3)



$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3}{x + 3} = \nexists$$

Ejercicios:

$$a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \quad b) \lim_{x \rightarrow -7} \frac{x + 7}{x^2 - 8x + 7} = \quad c) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 11x + 30}{x^2 - 8x + 12} =$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 10}{x^2 - 6x + 5} = \quad e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^2 - 7x}{2x} = \quad f) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 3}{x^2 - 6x + 9} =$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{2x^2 - 8x + 8} =$$

4) Límites infinitos

Cuando trabajamos en límites con x tiende a infinito debemos ser cuidadosos ya que los conjuntos infinitos no se comparan de igual manera que los conjuntos finitos, es decir con un mayor o un menor. En el caso de las funciones, nos interesará que tan “rápido” se aproximan

éstas a infinito cuando la x tiende infinito, en caso de que tiendan de diferente forma diremos que son de diferente orden.

Para resolver este tipo de límites utilizaremos la siguiente tabla:

$$\text{Ord (Log)} < \text{Ord (Pol)} < \text{Ord (Exp)}$$

¿Qué significa esto? Que las funciones logarítmicas van a tender a infinito más “lento” que las polinómicas, y que las polinómicas harán lo mismo con las exponenciales. Analicemos dos casos: primero cuando las funciones tienen expresiones polinómicas y luego cuando involucran potencias o logaritmos.

Caso 1

Ejemplo 1:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 5x + 4 = +\infty$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 + 4x - 1 = ind.$$

La indeterminación se produce porque como mencionamos antes se nos presenta una resta de infinitos, en este caso el primer monomio ($-2x^2$) sería menos infinito y el segundo ($+4x$) más infinito, por lo que la suma ¿?

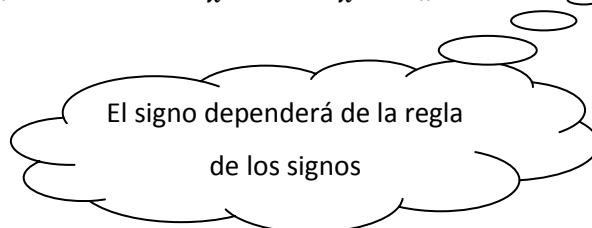
El procedimiento que se podría hacer en estos casos es sacar factor común la x con el mayor exponente que aparezca:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 + 4x - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(-2 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

$\begin{array}{ccc} \swarrow & \swarrow & \swarrow \\ -2 & + & 0 & - & 0 \end{array}$

Observemos que salvo el término principal los demás resultan cero por ser un número sobre infinito. Generalizando un poco la idea:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = \infty$$



Este procedimiento se puede hacer si x tiende a infinito y en cada caso no debemos realizar todos estos pasos sino que solamente en el polinomio nos quedaremos con el término principal.

Ejemplo 3:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 + 2x + 7x^6 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^6 = +\infty$$

Ejemplo 4:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{6x+10x^4-4x^3} = +\infty$$

$$e^{+\infty} = +\infty$$

$$e^{-\infty} = 0 +$$

$$e^0 = 1$$

Ejemplo 5:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} L(-6x + 8x^5) = +\infty$$

$$L(+\infty) = +\infty$$

$$L(0^+) = -\infty$$

Ejemplo 6:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} L\left(\frac{9x^3 - 6x}{6 + 2x^4}\right) = -\infty$$

Ejercicios (para el caso 1):

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^5 = \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} 6x^2 - 3x + 9 = \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 - 6x^{92} - 10 =$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^4+2x+6} = \quad e) \lim_{x \rightarrow -\infty} -5e^{-2x^4+10x} = \quad f) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5 - 7x^2)(e^{-3x}) =$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -\infty} L(7x^2 - 5x + 9) = \quad h) \lim_{x \rightarrow +\infty} L(3x + 6) \cdot e^{-3x+2x^5} \cdot (4x - 6x^2) =$$

Caso 2:

Como ya mencionamos las funciones exponenciales, polinómicas y logarítmicas pueden valer infinito cuando x tiende a infinito, pero éstas tienden a infinito de distinta forma, por lo que diremos que son de distinto orden. Si una función es de mayor orden que otra, a la segunda la pensaremos como un número real y no como un infinito. Por lo tanto los límites que siguen muestran los procedimientos que realizaremos en cada caso:

Ejemplo 1:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(x^3 + 6x + 9)}{e^{4x-16}} = ind.$$

Como las dos funciones tienden a infinito, se nos presenta un clásico ejemplo de indeterminación de la forma infinito sobre infinito por lo que usamos la siguiente regla:

- Si el numerador tiene mayor orden da infinito
- Si el numerador tiene menor orden da cero

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(x^3 + 6x + 9)}{e^{4x-16}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(x^3)}{e^{4x}} = 0$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-6x^3+2x^2}}{-3x^6 + 4x - 6} = -\infty$$

- Y si tenemos una suma o resta de infinitos nos quedamos con el infinito de mayor orden.

Ejemplo 3:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^2 - 6x^7 + e^{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x} = +\infty$$

Ejercicios (para el caso 2):

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x + 3x^5 + 8x^2}{e^{7x^2}} &= & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{L(-3x + 4x^2)} &= & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{x^3} = \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Lx - x^4}{e^x + x^3} &= & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Lx + x^2}{x^5} &= & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Lx + e^{4x} + x^2}{-e^{4x} + x^5} = \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{3x} - x)(-5x^2 - 3x) &= \end{aligned}$$

5) Número sobre infinito:

Utilizando tablas de límites sabemos que $\frac{n}{\infty} = 0$. El saber si es cero por derecha o izquierda (en realidad por arriba o por abajo ya que estamos trabajando en el eje y), me lo brinda la regla de los signos. Por lo tanto lo mostramos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{3x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{3x} = 0^+$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2}{6x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{6x} = 0^-$$

Ejercicios:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{7x + 6} &= & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{-9x^5} &= & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 3x - 1}{4x^3 + 2x + 6x^2 - 6} = \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{e^{-3x+16x^4+5}} &= & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x + 6x^6}{-2x + x^7} &= \end{aligned}$$

6) Límites cero sobre cero (con exponenciales y logarítmicas):

Para resolver este tipo de límites debemos definir previamente a que llamamos infinitésimos.

Definición: Dada una función f , diremos que f es un infinitésimo para $x \rightarrow \alpha$ si se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0$$

Ejemplos de infinitésimos son:

1) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ es un infinitésimo para $x \rightarrow 1$ ya que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2x + 1 = 0$$

2) $h(x) = e^x - 1$ para $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = 0$$

3) $g(x) = L(x)$ para $x \rightarrow 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} L(x) = 0$$

Teorema: El resultado de un límite no varía si se cambia un infinitésimo por otro infinitésimo equivalente.

¿Pero qué es un infinitésimo equivalente?

La definición de Infinitésimos equivalentes:

Dos infinitésimos f y g son equivalentes para $x \rightarrow \alpha$ si y sólo si $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

En particular nosotros usaremos los siguientes infinitésimos equivalentes para resolver límites y el símbolo para indicar que dos infinitésimos son equivalentes es $\sim$.

- Si $u \rightarrow 0$ entonces $e^u - 1 \sim u$
- Si $u \rightarrow 1$ entonces $L(u) \sim u - 1$

Ejemplo 1:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x - 2} = 1$$



$$e^{(x-2)} - 1 \sim (x - 2)$$

Cambiamos el infinitésimo exponencial por su infinitésimo equivalente, recurriendo también al teorema que afirma que el resultado del límite no varía.

Ejemplo 2:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{L(2x-3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-3-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$



$$L(2x-3) \sim 2x-4$$

Cambiamos un infinitésimo logarítmico por su equivalente, que es el logaritmando menos uno.

Ejemplo 3:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{Lx - L2}{x - 2} = ind$$

Propiedad:

$$L(a) - L(b) = L\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{Lx - L2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{L\left(\frac{x}{2}\right)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x}{2} - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x-2}{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{2(x-2)} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 4:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x+5} - e^7}{x - 2} = ind.$$

Propiedad:

$$e^a - e^b = e^b(e^{a-b} - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x+5} - e^7}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^7(e^{x+5-7} - 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^7(e^{x-2} - 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^7(x-2)}{(x-2)} = e^7$$

Ejercicios:

$$a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{3x+6} - 1}{x - 2} = \quad b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x^2-4} - 1}{x^2 - 5x + 6} = \quad c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{6x+6} - 1}{x^2 + 5x + 4} =$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x-5} - e^{-5}}{x^2 - 6x} = \quad e) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{e^{2x+3} - e^{11}}{x^2 - 16} = \quad f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{L(3x-5)}{x^2 - 7x + 10} =$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{L(7x - 20)}{x^2 - 11x + 24} = \quad h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{L(x + 4) - L(5)}{x^3 - 4x^2 + 2x + 1} = \quad i) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{L(x^2 + 5) - L(14)}{x^2 - 9} =$$